



**COMMISSIONE GEOTECNICA REGIONALE
COLLEGIO DEGLI INGEGNERI DI PADOVA**

INCONTRI SUL TEMA DELL'INGEGNERIA GEOTECNICA

I METODI NUMERICI NELLA VALUTAZIONE DEI CEDIMENTI

11 dicembre 1998



===== **PAOLO VARAGNOLO INGEGNERIA** =====
via Nazareth, 49 - 35128 PADOVA - Tel./Fax 049-8073882 - tel. 335-6452133

INDICE

1. Introduzione.....	3
2. I cedimenti delle strutture.....	4
3. Metodo Edometrico+ Boussinesq	5
3.1 Un miglioramento del metodo	6
4. Il metodo degli elementi finiti (F.E.M.)	9
4.1 Cenni sulle leggi costitutive	10
4.2 Equivalenza fra i modelli di Mohr-Coulomb e di Drucker-Prager	14
4.3 Rappresentazione di più strati mediante uno strato equivalente	15
4.4 Schematizzazione delle palificate	18
4.4.1 Confronto dei risultati ottenuti con schematizzazioni diverse	19
3. Cenni sull'interazione Terreno-Fondazione.....	23
4. Cenni sull'interazione Terreno-Fondazione-Struttura.	24
5. Bibliografia.....	25
Allegato A: alcuni esempi di calcolo.	27
Allegato B: ELEMENTO FINITO TRAVE 2-D SU SUOLO ALLA WINKLER	28

1. Introduzione

Il calcolo dei cedimenti rientra nel più generale problema dell'interazione terreno-struttura, nel quale si studiano contemporaneamente gli effetti indotti sul terreno di fondazione da una struttura, che a sua volta risulta influenzata in termini di deformazioni e tensioni dalle deformazioni del terreno. I mutui effetti di interazione tra suolo e strutture evolvono nel tempo e comportano una continua redistribuzione degli stati tensionali sia nel terreno che nelle strutture.

In genere, i problemi di interazione sono affrontati con metodi di calcolo che è possibile raggruppare in due categorie distinte. Nella prima rientrano i cosiddetti metodi disaccoppiati secondo i quali le equazioni di equilibrio, di continuità e di congruenza non sono tutte soddisfatte contemporaneamente. Nella seconda categoria rientra l'analisi "accoppiata" di interazione nel tempo con la quale in ogni istante le equazioni di campo e le condizioni al contorno sono tutte simultaneamente soddisfatte.

I metodi disaccoppiati sono più semplici da utilizzare in quanto sostanzialmente richiedono un minore onere per la preparazione dei dati relativi alla schematizzazione di calcolo. Con questi metodi è possibile prevedere lo sviluppo dei cedimenti del terreno nel tempo, oppure calcolare lo stato di sollecitazione delle strutture di fondazione.

Il metodo "accoppiato" consente invece, almeno da un punto di vista concettuale, di modellare ogni aspetto dell'interazione terreno-struttura, dai cedimenti del terreno alle sollecitazioni indotte nelle strutture di fondazione e in elevazione, ad ogni istante della vita della struttura.

Con riferimento allo schema rappresentato nella figura 1, si possono individuare tre tipi di approccio allo studio dell'interazione terreno-struttura. Nel primo tipo di approccio si concentra l'attenzione sulla valutazione dei cedimenti, con metodi disaccoppiati o accoppiati; nel secondo tipo di approccio si studia il regime di sollecitazioni e deformazioni nelle strutture di fondazione; nel terzo tipo di approccio si valuta globalmente la soluzione progettuale adottata, considerando contemporaneamente i cedimenti del terreno, lo stato tensio-deformativo delle fondazioni e delle strutture in elevazione.

Nella presente memoria viene sinteticamente presentato il primo tipo di approccio, mentre si accenna solamente agli altri due. Vengono poi presentati e confrontati i risultati dei calcoli dei cedimenti, condotti con diversi metodi.

INTERAZIONE TERRENO STRUTTURA

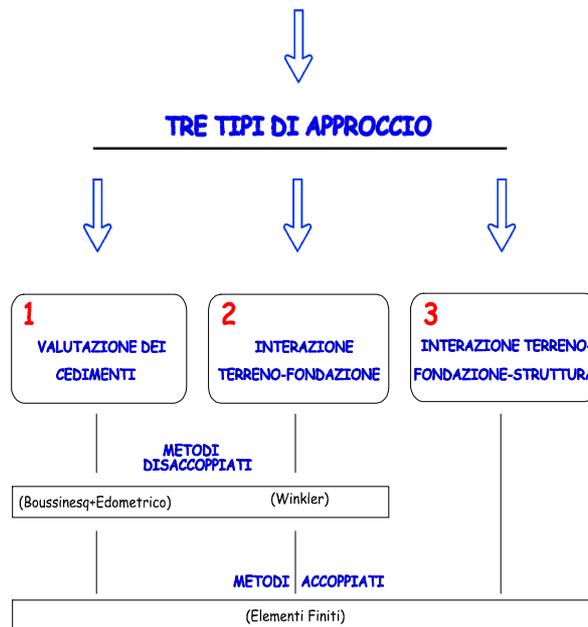


Figura 1

2. I cedimenti delle strutture

L'entità dei cedimenti ammissibili di una struttura dipende da molti fattori, alcuni legati alle caratteristiche strutturali delle opere in elevazione e di fondazione, quali ad esempio le dimensioni e le tipologie adottate, altri legati al tipo di macchinari e alle tolleranze ammesse dagli stessi per il loro corretto funzionamento, altri ancora sono legati a fattori non strettamente ingegneristici quali considerazioni di carattere estetico e psicologico, l'importanza economica dell'opera, le conseguenze economiche legate al manifestarsi di fessurazioni, allargamento dei giunti o leggere inclinazioni. È quindi evidente che la problematica dei cedimenti è molto complessa e ha stimolato, sin dalla nascita della geotecnica, ricerche da parte di molti studiosi.

Per quanto riguarda le deformazioni della struttura, vari autori hanno definito, mediante analisi effettuate su diverse tipologie strutturali, i limiti entro i quali queste debbono essere contenute [36], [25], [29], [6], [9] e [10].

In particolare viene spesso considerato come termine di confronto il rapporto fra il cedimento differenziale e la distanza fra due punti della fondazione, definito come distorsione angolare.

Non bisogna inoltre dimenticare che, dato il collegamento esistente tra cedimenti totali e differenziali, si può fare riferimento, per un accettabile comportamento delle strutture, ai soli cedimenti totali come suggerito da Terzaghi & Peck [40] e da Skempton & Mac Donald [36].

La corretta progettazione delle fondazioni di un'opera deve avere come obiettivo prioritario la prevenzione da eccessivi cedimenti, sia assoluti che differenziali, i quali potrebbero comprometterne del tutto la stabilità oppure potrebbero limitarne la funzionalità per la quale è concepita. Il progettista geotecnico deve essere quindi in grado di potere calcolare con una certa precisione i cedimenti delle opere in modo da ottimizzare la progettazione delle fondazioni, garantendo la sicurezza e la funzionalità delle strutture e allo stesso tempo limitando i costi evitando eccessivi sovradimensionamenti.

Un aspetto importante da considerare nella progettazione di opere importanti costruite in adiacenza le une alle altre riguarda la possibilità di valutare l'influenza reciproca delle varie impronte di carico; infatti le strutture,

che non vengono in genere costruite contemporaneamente, possono subire dei cedimenti supplementari per effetto della costruzione di edifici vicini. Il progettista geotecnico deve essere in possesso quindi di strumenti di calcolo in grado di analizzare anche questo tipo di problemi.

3. Metodo Edometrico+Boussinesq

Il metodo prevede sostanzialmente di calcolare la distribuzione di tensioni nel terreno con il metodo di Boussinesq e successivamente di calcolare i cedimenti nel tempo con riferimento ai risultati che si ottengono da prove edometriche eseguite su campioni rappresentativi.

Il tipo di approccio descritto di seguito è un adattamento ed un'evoluzione del metodo originale introdotto da Terzaghi [40], utilizzato dall'autore nel corso di una ricerca [7], [8], [11], [15].

Per utilizzare un unico modello di calcolo per terreni coesivi e per terreni incoerenti, si può considerare che i cedimenti totali, ad ogni istante considerato, siano ottenuti come somma di un cedimento immediato e di un cedimento di consolidazione. Adottando una legge costitutiva di tipo lineare, noto l'incremento di tensione totale $\Delta\sigma$ indotto dal carico, il cedimento di uno strato di spessore H è dato dalla:

$$\Delta H = H \frac{\Delta\sigma}{E}$$

Il primo passo per affrontare un'analisi dei cedimenti consiste nella schematizzazione del terreno come un multistrato in cui le caratteristiche geotecniche sono variabili da strato a strato [35].

Le ipotesi assunte sono le seguenti:

1. ogni strato del terreno che forma il multistrato è considerato di spessore costante;
2. il moto dell'acqua e le deformazioni del terreno avvengono solo nella direzione verticale (condizioni edometriche);
3. incompressibilità delle particelle solide e dell'acqua;
4. saturazione totale del terreno ($S_r = 100\%$);
5. relazione tensioni deformazioni lineare per quanto riguarda i cedimenti immediati.

Gli strati di terreno vengono suddivisi in un certo numero di sottostrati per ognuno dei quali viene calcolato l'aumento di tensione medio indotto dal carico applicato, con la teoria di Boussinesq relativa ad un semispazio elastico omogeneo ed isotropo. Le impronte di carico delle strutture possono essere schematizzate come infinitamente rigide o flessibili, di forma rettangolare e circolare o di forma ottenuta dalla combinazione di queste geometrie semplici.

Nell'istante in cui viene applicato il carico, per le ipotesi assunte, la sovrappressione neutra indotta Δu , in condizioni non drenate, è uguale all'incremento di tensione totale $\Delta\sigma_z$ provocato dal carico:

$$\Delta u = \Delta\sigma_z$$

Viene poi calcolato l'andamento nel tempo delle sovrappressioni neutre tramite l'equazione:

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

dove:

C_v = coefficiente di consolidazione;

u = pressione neutra;

z = profondità;

t = tempo.

Per il principio delle tensioni efficaci, la dissipazione nel tempo delle sovrappressioni neutre induce un incremento delle tensioni efficaci nel terreno al quale corrisponde una deformazione che si può ricavare dal diagramma (tensioni efficaci σ' - indice dei vuoti e) ottenuto con prove edometriche.

La curva di consolidazione edometrica può essere schematizzata con due segmenti (vedi figura 2.a) fornendo i valori dell'indice di compressibilità C_c e dell'indice di ricomprensione C_s , ovvero può essere descritta con un numero maggiore di segmenti (vedi figura 2.b) fornendo le coordinate di alcuni dei punti che la definiscono.

L'equazione di Boussinesq che consente di ricavare la tensione in un punto qualsiasi di un semispazio elastico omogeneo ed isotropo per effetto di una forza concentrata applicata in sommità, è stata integrata in forma chiusa da diversi autori. E' così possibile considerare in modo piuttosto semplice impronte di carico "infinitamente flessibili o rigide" di forma rettangolare o circolare. Nel caso di impronte di tipo flessibile possono inoltre essere considerate composizioni qualsiasi delle suddette forme elementari.

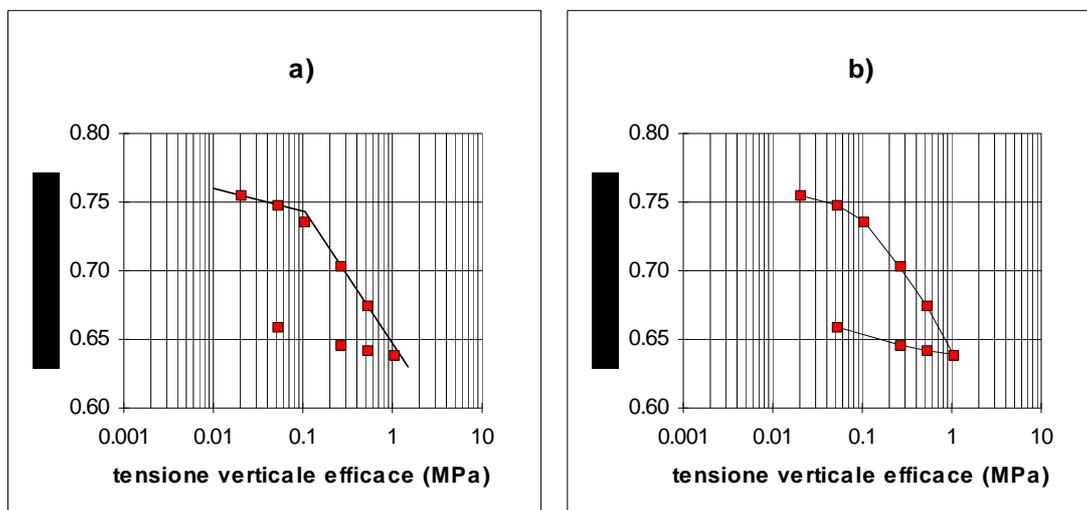


Figura 2- a) Curva edometrica schematizzata con una bilatera

b) Curva edometrica definita per punti

3.1 Un miglioramento del metodo

Il metodo sinora esposto è stato implementato in un programma di calcolo denominato EDOM, utilizzato principalmente per calcolare i cedimenti delle principali opere delle centrali termoelettriche dell'ENEL [7], [8], [11]. I risultati dei calcoli sono stati confrontati con le misure sperimentali disponibili, fornendo indicazioni sull'attendibilità e sui limiti del metodo.

Dalle analisi effettuate e dalle esperienze maturate con il programma EDOM, è stata messa in evidenza la difficoltà di aderire alla realtà fisica del problema non appena si abbandonino le ipotesi piuttosto restrittive che prevedono di schematizzare il problema con impronte di carico "perfettamente flessibili" su un terreno omogeneo.

I limiti della versione originale del programma EDOM vengono brevemente illustrati di seguito.

Il programma EDOM prevede la possibilità di studiare anche fondazioni di tipo "perfettamente rigido", limitatamente però a geometrie particolari quali impronte rettangolari e circolari, con l'ipotesi di distribuzione delle tensioni nel terreno secondo lo schema "perfettamente flessibile" per punti appartenenti a verticali al di fuori dell'area di carico.

Nel caso in cui si voglia considerare l'effetto di strati con diversa rigidezza, sulla distribuzione delle tensioni nel terreno, è possibile correggere le tensioni calcolate secondo la teoria di Boussinesq nell'ipotesi di semispazio omogeneo, tenendo conto in maniera approssimata dell'effetto di due soli strati di cui il più superficiale sia più rigido del secondo. Viene trascurato l'effetto nel caso in cui il primo strato sia meno rigido del secondo e non è possibile inoltre tenere conto di una stratificazione più complessa.

L'analisi di fondazioni profonde è subordinata alla formulazione di ipotesi semplificative riguardanti la posizione e le dimensioni di una fondazione fittizia al disotto della quale vengono distribuite le tensioni trasmesse dalla struttura. Tale approccio, che pure rende possibile affrontare problemi abbastanza complessi, è basato molto sull'esperienza del progettista e lascia margini di incertezza sulle scelte da effettuare.

I problemi messi in evidenza dalle analisi effettuate e qui brevemente riassunti, assieme alla possibilità di considerare strutture di rigidezza qualsiasi, vengono parzialmente risolti affidando l'analisi dello stato tensionale e deformativo, nell'istante in cui vengono applicati i carichi, ad un codice ad elementi finiti tridimensionali.

Il metodo degli elementi finiti viene brevemente descritto in un paragrafo successivo. Dal punto di vista dello schema di figura 1, questo tipo di approccio rimane disaccoppiato in quanto la distribuzione delle tensioni nel terreno viene calcolata indipendentemente dal tempo.

La legge costitutiva del terreno può essere scelta fra le molte disponibili, fra le quali la più semplice è quella che considera il terreno elastico-lineare. La scelta del semplice modello di comportamento lineare elastico consente di contenere i tempi di calcolo ma non si tratta, come è stato messo in evidenza dal confronto fra i risultati ottenuti con tale modello e le misure sperimentali, di un'ipotesi troppo semplificativa quando si vogliono studiare problemi di cedimenti in fase di costruzione e di esercizio, in corrispondenza cioè di livelli tensionali modesti.

Disponendo di un programma F.E.M. è quindi possibile utilizzarlo in alternativa al metodo di Boussinesq, secondo lo schema rappresentato nella figura 3.

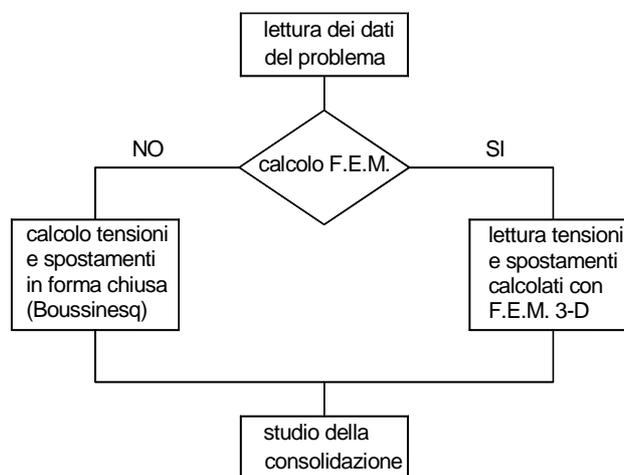


Figura 3

Oltre ad una definizione dello stato tensionale più rigorosa, l'interfacciamento con un codice ad elementi finiti permette di calcolare anche gli spostamenti conseguenti all'applicazione dei carichi tenendo conto della tridimensionalità del problema e quindi superando le ipotesi semplificative che vengono fatte per il calcolo dei cedimenti immediati con le soluzioni in forma chiusa.

Dalle esperienze maturate con il confronto tra le distribuzioni delle tensioni calcolate in forma chiusa e con gli elementi finiti è stata messa in evidenza la marcata influenza che gioca la posizione delle condizioni al contorno

alla base della mesh del terreno. Infatti le tensioni calcolate in forma chiusa tendono a smorzarsi con andamento asintotico rispetto alla verticale di calcolo più rapidamente delle tensioni calcolate con gli elementi finiti e con differenze maggiori quanto minore è lo spessore di terreno considerato nella discretizzazione.

Nella figura 4 sono rappresentate le distribuzioni delle tensioni verticali con la profondità calcolate in forma chiusa e con gli elementi finiti con due diverse ipotesi sulla superficie al contorno inferiore; le distribuzioni delle tensioni sono state ottenute da alcune analisi preliminari eseguite per i calcoli dei cedimenti del rilevato di precarico n. 1 della centrale termoelettrica di Sermide.

La scelta dello spessore di terreno da considerare nei calcoli deve essere fatta quindi con molta attenzione per non trascurare dei contributi di spostamento importanti nel caso in cui il calcolo sia condotto in forma chiusa e per non sovrastimare invece le tensioni e i cedimenti nel caso in cui il calcolo sia condotto con gli elementi finiti.

Nel caso in cui vengano analizzati problemi di cedimenti di strutture su fondazioni profonde, le differenze fra i calcoli eseguiti con la teoria di Boussinesq e con gli elementi finiti sono ancora maggiori, come si può vedere dalle distribuzioni delle tensioni verticali rappresentate nella figura 5. Con il programma EDOM infatti, per calcolare i cedimenti di fondazioni profonde, viene schematizzata una fondazione fittizia e le tensioni al disopra del piano di posa della fondazione stessa sono considerate nulle; in questo modo vengono trascurati i contributi forniti ai cedimenti dagli strati più superficiali.

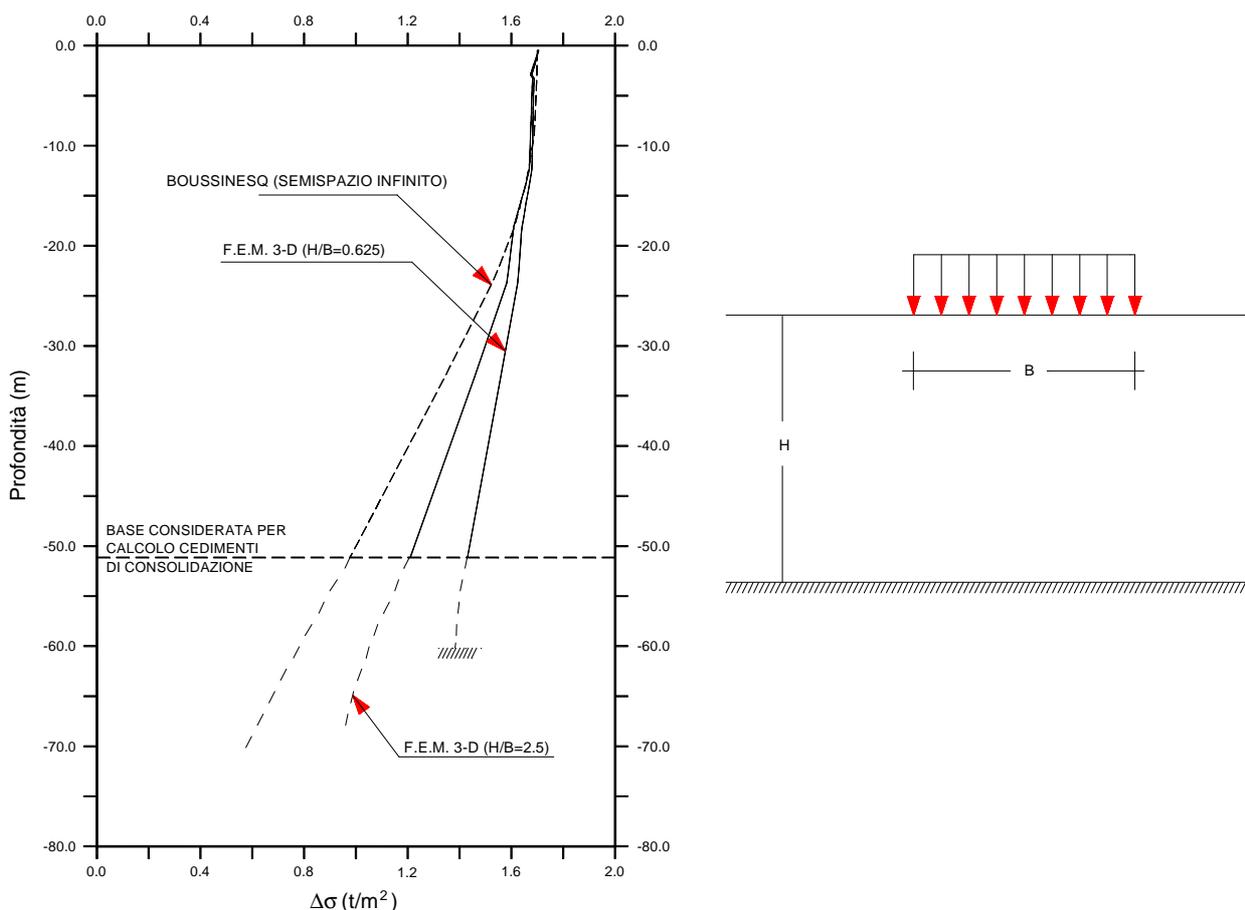


Figura 4 - Rilevato di precarico serbatoio n° 1 di Sermide - $\Delta\sigma$ al centro con carico $q = 1.7 \text{ t/m}^2$

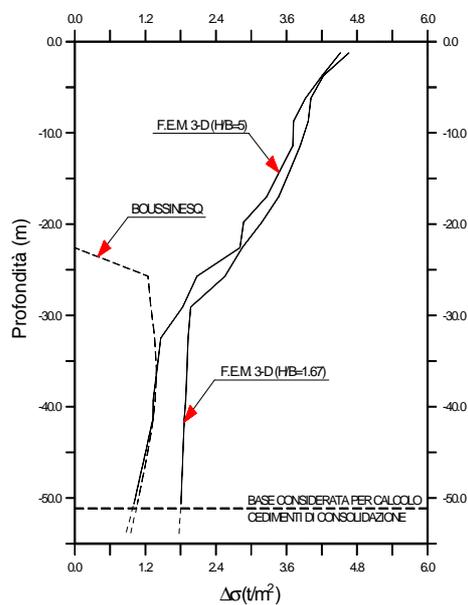


Figura 5 - Ciminiera gruppi 3-4 di Ostiglia - $\Delta\sigma$ al centro con carico $q = 4.8 \text{ t/m}^2$

4. Il metodo degli elementi finiti (F.E.M.)

Il metodo degli elementi finiti consente di risolvere i problemi di meccanica del continuo in modo del tutto generale, approssimando con dei polinomi una qualsiasi variabile continua in un dominio. I polinomi sono funzione dei valori che le variabili assumono in alcuni punti detti nodi.

Si possono analizzare problemi statici e dinamici, con varie leggi costitutive dei materiali, in due o tre dimensioni. Questo metodo rientra negli approcci di tipo “accoppiato” in quanto è possibile (ma non necessario) modellare ogni aspetto dell’interazione terreno-struttura, dai cedimenti del terreno alle sollecitazioni indotte nelle strutture di fondazione e in elevazione, ad ogni istante della vita della struttura.

Applicando la teoria della consolidazione tridimensionale di Biot [5], il campo degli spostamenti e quello delle sovrappressioni neutre si influenzano a vicenda, per cui le equazioni di equilibrio contengono termini dovuti alle

sovrapressioni neutre e viceversa. Le equazioni si dicono accoppiate¹ e devono essere risolte contemporaneamente. Il problema è dipendente dal tempo che si suppone suddiviso in elementi monodimensionali; ad ogni step temporale viene risolto un sistema dove compaiono i risultati degli step precedenti.

Le pressioni neutre che risultano dalla soluzione del sistema di equazioni devono generalmente essere trattate con la tecnica di smoothing proposta da Reed [32] per eliminare le oscillazioni spaziali.

Per una descrizione più dettagliata sia del metodo degli elementi finiti che dei problemi derivanti dalla soluzione accoppiata dei campi di spostamento e sovrapressioni neutre si rimanda a [19], [23], [32], [45].

L'impostazione delle analisi F.E.M. necessita che siano stabilite le leggi costitutive che governano il comportamento dei materiali sia delle strutture che dei terreni, le caratteristiche di permeabilità dei terreni, le geometrie dei domini in esame e le condizioni al contorno relative sia agli spostamenti che alle pressioni neutre.

4.1 Cenni sulle leggi costitutive

In questo paragrafo viene considerato un mezzo monofase, trascurando quindi l'accoppiamento con il campo delle sovrapressioni neutre.

Lo stato tensionale e deformativo in un punto è individuato da 6 componenti indipendenti, rispettivamente di tensione e di deformazione. Il compito delle leggi costitutive è quello di legare tensioni e deformazioni secondo un modello matematico di comportamento. Nella forma più generale si può scrivere:

$$|\sigma'| = f(|\epsilon|)$$

dove $|\sigma'|$ e $|\epsilon|$ sono i vettori che contengono le componenti di tensione e di deformazione.

Lo stato di tensione e di deformazione in un punto può essere rappresentato utilizzando opportune combinazioni delle componenti dei rispettivi tensori, invarianti rispetto al sistema di riferimento scelto. In geotecnica è frequente l'uso dei seguenti invarianti:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{ottaedrica} \text{ (tensione media)}$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \tau_{ottaedrica} \text{ (tensione deviatorica)}$$

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \text{ (deformazione volumetrica)}$$

$$\epsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \text{ (deformazione deviatorica)}$$

Nella figura 6 è rappresentato lo spazio delle tensioni principali, con il piano ottaedrico e la direzione dell'invariante p.

¹ Il termine accoppiato utilizzato in questo caso ha un significato diverso da quello inteso nel paragrafo 1., dove veniva infatti racchiuso fra apici.

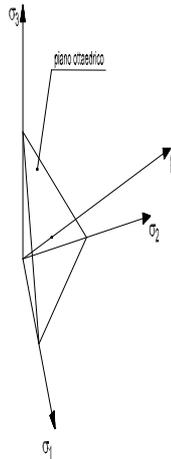


Figura 6

teoria dell'elasticità

Un materiale viene definito elastico se le deformazioni conseguenti ad uno stato di tensione sono completamente reversibili qualora lo stato di tensione si annulli. La relazione sforzi-deformazioni può essere scritta nella forma:

$$|\sigma^e| = [C] |\epsilon|$$

dove $[C]$ è la matrice di elasticità che contiene 36 coefficienti.

I coefficienti della matrice di elasticità si riducono a due soli indipendenti nel caso di materiale isotropo ed omogeneo.

teoria della plasticità

Nel comportamento di molti materiali si riscontra sperimentalmente che non tutte le deformazioni sono reversibili, cioè elastiche. La parte di deformazione irreversibile è chiamata plastica. Nella teoria convenzionale si usa distinguere la deformazione $|\epsilon|$ totale come composta da una parte elastica $|\epsilon^e|$ e da una parte plastica $|\epsilon^p|$ per cui:

$$d|\epsilon| = d|\epsilon^e| + d|\epsilon^p|$$

L'incremento di deformazione elastica si ricava con la relazione già presentata, mentre per la definizione di $d|\epsilon^p|$ si ricorre alla teoria incrementale plastica. Tale teoria prevede la formulazione di un criterio di snervamento, di un criterio di flusso e di una legge di incrudimento che permettano di individuare rispettivamente l'esistenza, la direzione ed il modulo di $d|\epsilon^p|$. Nella forma più generale si può definire una superficie di plasticizzazione nella forma:

$$F(|\sigma|, |\alpha|, h) = 0$$

dove $|\alpha|$ e h indicano rispettivamente la posizione e la dimensione della superficie di snervamento nello spazio delle tensioni. Se la superficie si espande senza cambiamento di forma né di posizione ($|\alpha| = \text{cost.}$) si parla di incrudimento isotropo (figura 7.b), mentre se si ha solo una traslazione rigida della superficie ($h = \text{cost.}$) si parla di incrudimento cinematico (figura 7.c).

Con riferimento alla rappresentazione geometrica, l'equazione $F(|\sigma|, |\alpha|, h) = 0$ individua il luogo degli stati tensionali limite.

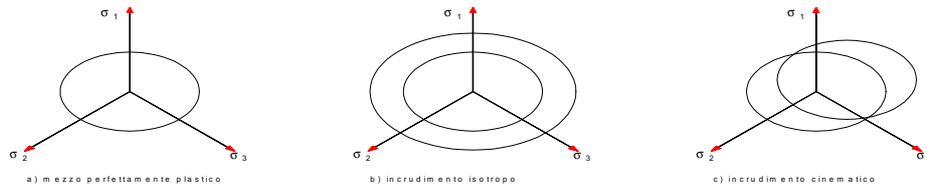


Figura 7

Trascurando l'incrudimento una possibile forma esplicita per rappresentare la superficie di plasticizzazione è la seguente:

$$F(|\sigma|) = q + M p - N$$

dove M, N sono funzione dei parametri c (coesione) e φ (angolo di attrito).

Sono state proposte varie relazioni per ottenere M, N da c, φ ed ognuna di queste (riportate in tabella I) corrisponde ad un diverso criterio di plasticizzazione che va scelto in funzione del materiale da analizzare. Il criterio di Mohr-Coulomb sembra rappresentare meglio il comportamento del terreno.

modello	N	M
Tresca	$\frac{3c}{\sqrt{3} \cos \theta}$	0
Von Mises	$2c$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi}$	$\frac{3c \sin \varphi}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi}$
Drucker-Prager	$\frac{6c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$	$\frac{6c \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$

Tabella I

Nelle figure 8 e 9 sono rappresentate le varie superfici di plasticizzazione nello spazio delle tensioni principali e le corrispondenti sezioni nel piano ottaedrico.

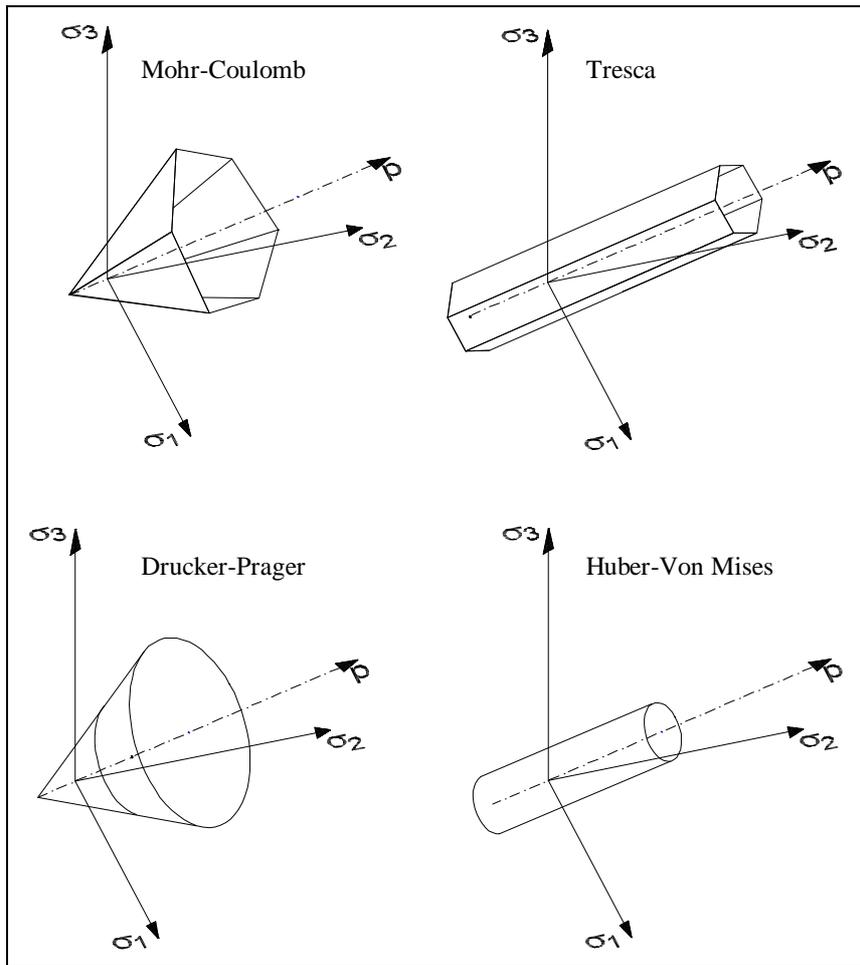


Figura 8

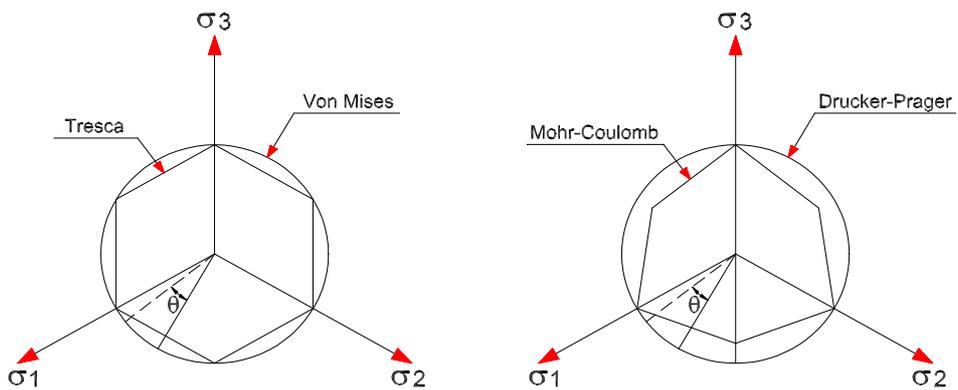


Figura 9

Quando si verifica la condizione $dF > 0$ è necessario determinare direzione ed intensità della deformazione plastica che si pone pari a:

$$d|\varepsilon^p| = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial |\sigma|}$$

dove Q è il potenziale plastico e $d\lambda$ una costante positiva di proporzionalità. Si vede che l'incremento di deformazione plastica è ortogonale alla superficie potenziale. Quando $Q \equiv F$, $|\varepsilon^p|$ è ortogonale alla superficie di snervamento e si parla di flusso associato, mentre se Q ed F sono funzioni distinte si parla di flusso non associato.

Stato critico e modello Cam-Clay

In presenza di carichi non monotonici i modelli plastici descritti cadono in difetto ed è necessario, per i terreni, utilizzarne di più specifici. Il modello Cam-Clay costituisce il primo esempio di modello elasto-plastico-incrudente introdotto in letteratura per descrivere il comportamento delle argille tenere.

Il comportamento di un elemento di terreno è una successione di stati fisici caratterizzati nel corso di una prova triassiale dai parametri p' (tensione efficace media), q (tensione deviatorica), e e (indice dei vuoti).

Roscoe, Schofield e Wroth (1958) ipotizzarono per primi l'esistenza di una superficie di stato limite che, nello spazio dei parametri (p' , q , e) separa gli stati fisici possibili da quelli non possibili.

Dall'idea originale del modello Cam-Clay sono stati sviluppati altri modelli analoghi. Nella figura 10 è rappresentato schematicamente uno di questi modelli nel piano p' , q . Nelle applicazioni numeriche la linea di stato critico (CSL) è normalmente individuata dalla superficie di plasticizzazione di Mohr-Coulomb o di Drucker-Prager.

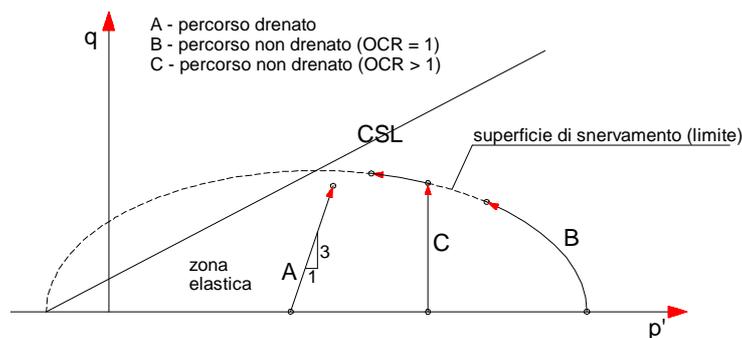


Figura 10

4.2 Equivalenza fra i modelli di Mohr-Coulomb e di Drucker-Prager

L'esperienza dimostra che il modello di Mohr-Coulomb riesce a rappresentare abbastanza bene il comportamento del terreno in condizioni di rottura. Dal punto di vista però del calcolo numerico, questo modello conduce spesso a difficoltà di convergenza dovute alle discontinuità della superficie nello spazio delle tensioni (cfr. fig. 8 e 9).

Per ovviare a questo inconveniente di tipo numerico sono stati sviluppate espressioni della superficie di plasticizzazione modificate rispetto a quella originale, con gli angoli smussati.

Un metodo semplice per ottenere gli stessi risultati limite del modello di Mohr-Coulomb consiste nell'utilizzare il modello di Drucker-Prager, con opportuni valori equivalenti dell'angolo di attrito e della coesione.

In particolare la superficie di Drucker-Prager circoscritta a quella di Mohr-Coulomb si ottiene per un valore dell'anomalia $\theta = 30^\circ$, che corrisponde alle condizioni triassiali di compressione. In queste condizioni pertanto i valori di c , ϕ equivalenti coincidono con quelli di Mohr-Coulomb.

In condizioni di stato piano di deformazione, si può dimostrare che la superficie di Drucker-Prager equivalente alla superficie di Mohr-Coulomb è quella inscritta. Il valore dell'anomalia in questo caso si ricava cercando il minimo valore di q rispetto a θ :

$$\frac{\partial (N - M p)}{\partial \theta} = 0$$

da cui si ricava:

$$\theta = -\operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{3}}\right)$$

I valori di c^e , φ^e del modello Drucker-Prager equivalente a quello di Mohr-Coulomb risultano in questo caso:

$$\varphi^e = \arcsen \frac{3M}{6 + M} \qquad c^e = \frac{N(3 - \operatorname{sen} \varphi^e)}{6 \cos \varphi^e}$$

4.3 Rappresentazione di più strati mediante uno strato equivalente

La stratigrafia del terreno si presenta generalmente composta da un'alternanza più o meno fitta di strati di natura e caratteristiche diverse, per cui risulta difficile e comunque oneroso in termini di tempi di calcolo riuscire a schematizzare con elementi finiti tutti i vari strati. Bisogna quindi riuscire a rappresentare più strati con un unico strato equivalente e significativo.

Se le analisi da eseguire sono del tipo accoppiato, per le quali è necessario realizzare degli infittimenti della mesh negli strati coesivi in prossimità delle superfici drenanti, al fine di rappresentare con una certa accuratezza l'andamento delle pressioni neutre [32], il problema del tempo di calcolo si manifesta in modo molto evidente. Il problema si ripropone negli stessi termini anche nelle analisi tensio-deformative disaccoppiate tridimensionali. Pensando invece di volere rappresentare una serie di strati di diversa natura e caratteristiche mediante un singolo strato, si devono ricavare sia il modulo di deformazione che le caratteristiche di permeabilità dello strato equivalente [3].

Modulo di deformazione equivalente

Per quanto riguarda il modulo di deformazione equivalente E^* , si può fare riferimento ad una situazione drenata: supponendo che la somma s^* degli spessori s_i degli strati da unire non sia troppo grande, si può ipotizzare che lo stato di tensione sia costante all'interno degli strati per cui è sufficiente considerare gli stessi in serie come rappresentato in figura 11.

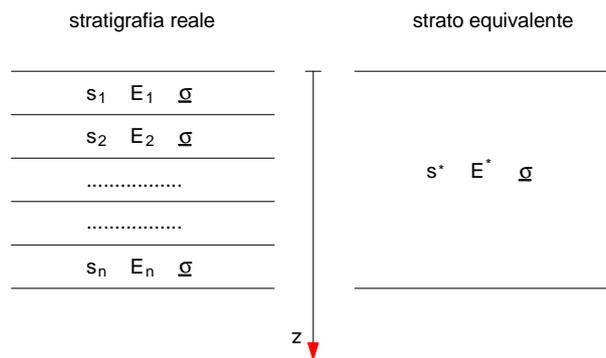


Figura 11

I simboli della figura hanno il seguente significato:

- s_i = spessore dello strato i-esimo;
- E_i = modulo di Young dello strato i-esimo;

s^* = spessore totale;
 E^* = modulo di Young equivalente;
 $\underline{\sigma}$ = vettore delle tensioni.

Considerando i soli spostamenti verticali δ_{zi} si può scrivere:

$$\delta_{zi} = \frac{\sigma_z s_i}{E_i} \quad (i = 1, n) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \delta_z^* = \frac{\sigma_z s^*}{E^*} \\ \delta_z^* = \sum_{i=1}^n \delta_{zi} \end{cases} \quad (2)$$

Introducendo la (1) nelle (2) si ottiene l'espressione del modulo di deformazione equivalente:

$$E^* = \frac{s^*}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{E_i}} \quad (3)$$

Coefficiente di permeabilità equivalente

La individuazione delle caratteristiche di permeabilità dello strato equivalente richiede la formulazione di ipotesi che devono essere attentamente tenute in considerazione, in quanto la loro validità è legata alla distribuzione relativa delle permeabilità dei vari strati e alle condizioni di drenaggio al contorno. L'impostazione del problema può essere fatta sia in termini di coefficienti di permeabilità che in termini di coefficienti di consolidazione.

Nella trattazione che segue si farà riferimento a strati di terreno coesivi saturi caratterizzati da coefficienti di permeabilità K_i o di consolidazione C_{v_i} costanti.

La prima ipotesi riguarda la monodimensionalità del moto dell'acqua nella direzione verticale e non è da ritenersi troppo restrittiva in quanto l'effetto bi o tridimensionale viene considerato nell'analisi ad elementi finiti successivamente a questa prima fase di schematizzazione.

Facendo riferimento ad una serie di strati coesivi indefiniti lungo la direzione orizzontale, delimitati da una superficie impermeabile inferiore e da una superficie drenante superiore (figura 12) si possono esprimere le velocità v_i dell'acqua in accordo con la legge di Darcy:

$$v_i = -K_i \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

dove u_i è la sovrappressione neutra dello strato i-esimo.

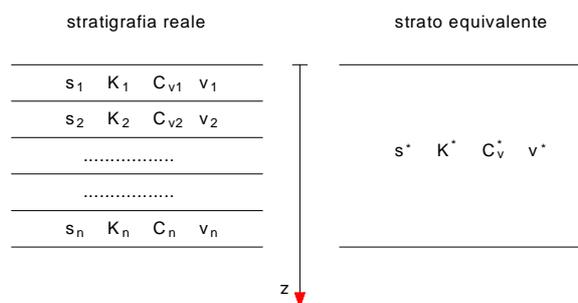


Figura 12

Se le permeabilità dei vari strati sono dello stesso ordine di grandezza, è lecito fare l'ipotesi che le velocità dell'acqua v_i siano uguali e cioè:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = v^*$$

Da questa ipotesi, esprimendo le velocità secondo la legge di Darcy, si ottiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{K^*}{K_i} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

Un'altra relazione si può ricavare imponendo che la somma delle differenze di sovrappressione neutra nei vari strati sia uguale alla differenza di pressione neutra nello strato equivalente e precisamente:

$$\int_0^{s^*} \frac{\partial u}{\partial z} dz = \sum_{i=1}^n \int_0^{s_i} \frac{\partial u_i}{\partial z} dz$$

con una approssimazione si possono considerare costanti all'interno degli strati i termini $\partial u / \partial z$, per cui:

$$s^* \frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

Utilizzando la (4), la permeabilità equivalente risulta:

$$K^* = \frac{s^*}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{K_i}} \quad (5)$$

Questa espressione è stata suggerita da Terzaghi [39].

Volendo esprimere le caratteristiche dello strato equivalente tramite il coefficiente di consolidazione C_v^* si può riscrivere la (5) come:

$$\frac{C_v^* \gamma_w}{E^*} = \frac{s^*}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i E_i}{C_{vi} \gamma_w}}$$

dove γ_w è il peso specifico dell'acqua.

Sostituendo al posto di E^* l'espressione (3) precedentemente ricavata si ottiene:

$$C_v^* = \frac{s^{*2}}{\frac{s_i^2}{C_{vi}}} \quad (6)$$

Il confronto fra i risultati ottenuti con questo tipo di approssimazione e di ipotesi e quelli ottenuti con le differenze finite, rispettando anche la continuità delle sovrappressioni neutre all'interfaccia fra i vari strati, mette in evidenza la limitata validità delle espressioni (5) e (6).

Per determinare le caratteristiche di permeabilità equivalenti si possono tarare dei modellini alle differenze finite utilizzando i valori di C_v forniti dalla (6) solamente per avere dei parametri di primo tentativo.

4.4 Schematizzazione delle palificate

Nella fase di schematizzazione delle strutture di fondazione si deve cercare di contenere i tempi di calcolo, in modo particolare quando si adottano modelli ad elementi finiti. Le strutture di fondazione possono essere di tipo superficiale (plinti, travi rovesce o platee) o profonde (pali o diaframmi). Le schematizzazioni che vengono adottate dipendono sia dai metodi di calcolo sia dalle tipologie strutturali. Per le fondazioni superficiali non si pongono particolari problemi.

Per le fondazioni profonde se la schematizzazione è operata con elementi finiti, al fine di contenere i tempi di calcolo entro limiti accettabili, è opportuno ricorrere a schemi semplificati che non tengano conto della reale distribuzione delle strutture nello spazio tridimensionale.

Nel caso in cui i pali siano disposti lungo delle circonferenze (figura 13.a) e siano abbastanza distanziati fra loro, si possono considerare, in pianta, delle corone circolari (figura 13.b) ognuna delle quali caratterizzata da un'area pari alla somma delle aree dei pali che stanno sulla circonferenza corrispondente e con diametro medio pari a quello della circonferenza stessa [31].

Nel caso in cui i pali siano molto numerosi e fitti (figura 14) il metodo esposto comporterebbe una discretizzazione troppo onerosa per cui è opportuno considerare il volume individuato dalla palificata come un materiale omogeneo di rigidezza pari a quella dei pali e del terreno compreso, considerati in parallelo.



Figura 13

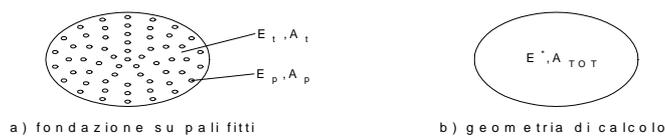


Figura 14

Ipotizzando che non ci siano scorrimenti fra i pali e il terreno compreso tra essi, per la congruenza si può scrivere:

$$\epsilon_p = \epsilon_t = \epsilon^*$$

dove: ϵ_p = deformazione dei pali;

ϵ_t = deformazione del terreno;

ϵ^* = deformazione del materiale equivalente.

La relazione precedente si può esplicitare come:

$$\frac{\sigma_p}{E_p A_p} = \frac{\sigma_t}{E_t A_t} = \frac{\sigma_{TOT}}{E^* A_{TOT}}$$

dove: σ_p = tensione sui pali;
 σ_t = tensione sul terreno;
 σ_{TOT} = tensione totale;
 A_p = area dei pali;
 A_t = area del terreno;
 A_{TOT} = area complessiva.

Per l'equilibrio deve valere inoltre la seguente relazione:

$$\sigma_p + \sigma_t = \sigma_{TOT}$$

si può quindi ricavare l'espressione del modulo equivalente che risulta :

$$E^* = \frac{E_p A_p + E_t A_t}{A_{TOT}}$$

Un'altra possibilità per semplificare la mesh di calcolo è rappresentata dall'inserimento, al posto dei pali, di elementi di tipo TRUSS (bielle) di opportuna rigidità. In questo modo si riesce a ridurre notevolmente il numero di elementi della mesh. Nel paragrafo successivo si vedrà che la qualità delle informazioni che si ottengono dal calcolo rimane buona anche con questa approssimazione.

4.4.1 Confronto dei risultati ottenuti con schematizzazioni diverse

Con riferimento alle possibili semplificazioni della mesh introdotte nel precedente paragrafo, vengono di seguito presentati i risultati ottenuti con tre diverse schematizzazioni di una fondazione su pali. Si tratta di una fondazione in c.a. della larghezza di 5 m e dello spessore di 2 m, appoggiata su 4 pali della lunghezza di 8 m. Sulla fondazione è applicato un carico uniformemente distribuito di 20 t/m².

Per semplicità le analisi sono state condotte con elementi in stato di deformazione piana e pertanto la fondazione è di tipo nastriforme ed i pali sono in realtà degli elementi di diaframma di larghezza pari a 0.5 m. Il modulo elastico del terreno è assunto pari a 1.0E+03 t/m² e quello del calcestruzzo pari a 3.0E+06 t/m².

schematizzazione 1 (cfr. figura 15)

I pali sono stati schematizzati con elementi della larghezza di 0.5 m e di lunghezza pari a 4 m. La mesh risultante comprende 104 elementi isoparametrici a 8 nodi, per un totale di 355 nodi.

schematizzazione 2 (cfr. figura 16)

La palificata è stata schematizzata con una fondazione fittizia. L'area dei pali (per unità di lunghezza) è pari a 2 m², mentre quella del terreno compreso fra i pali è di 3 m². Il modulo equivalente, in accordo con la relazione ricavata nel paragrafo precedente risulta:

$$E^* = (10000 \times 3 + 3.0E+06) / (3 + 2) = 1.206E+06 \text{ t/m}^2$$

La mesh risultante comprende 72 elementi isoparametrici a 8 nodi, per un totale di 251 nodi.

schematizzazione 3 (cfr. figura 17)

I pali sono stati schematizzati con elementi TRUSS di calcestruzzo, con un'area (per unità di lunghezza) pari a 0.5 m². La geometria della mesh è la stessa della schematizzazione 2.

Nella tabella II vengono confrontati i risultati ottenuti in termini di cedimento massimo della fondazione e di tempo di calcolo riferito alla mesh più complessa. Oltre ad un risparmio del tempo di calcolo, semplificando la mesh si ottiene anche una riduzione dell'impegno necessario all'impostazione dell'analisi.

schema	rif. figura	tempo di calcolo	$\delta_{y \max}$ (mm)
pali	15	100	8.29
fondazione fittizia	16	59	8.38
elementi TRUSS	17	62	8.38

Tabella II

Confrontando i risultati rappresentati graficamente nelle figure 15, 16 e 17 si nota la sostanziale equivalenza dei calcoli condotti con le diverse schematizzazioni.

L'uso della fondazione fittizia risulta la scelta più economica in tutti i sensi, mentre l'inserimento di elementi TRUSS, a parità di impegno dal punto di vista della preparazione dei dati, a parere dello scrivente sembra rappresentare i pali in modo più elegante ed intuitivo.

CEDIMENTI E TENSIONI CALCOLATI CON ELEMENTI IN CALCESTRUZZO (file PALI4)

2.5
scala geometrica

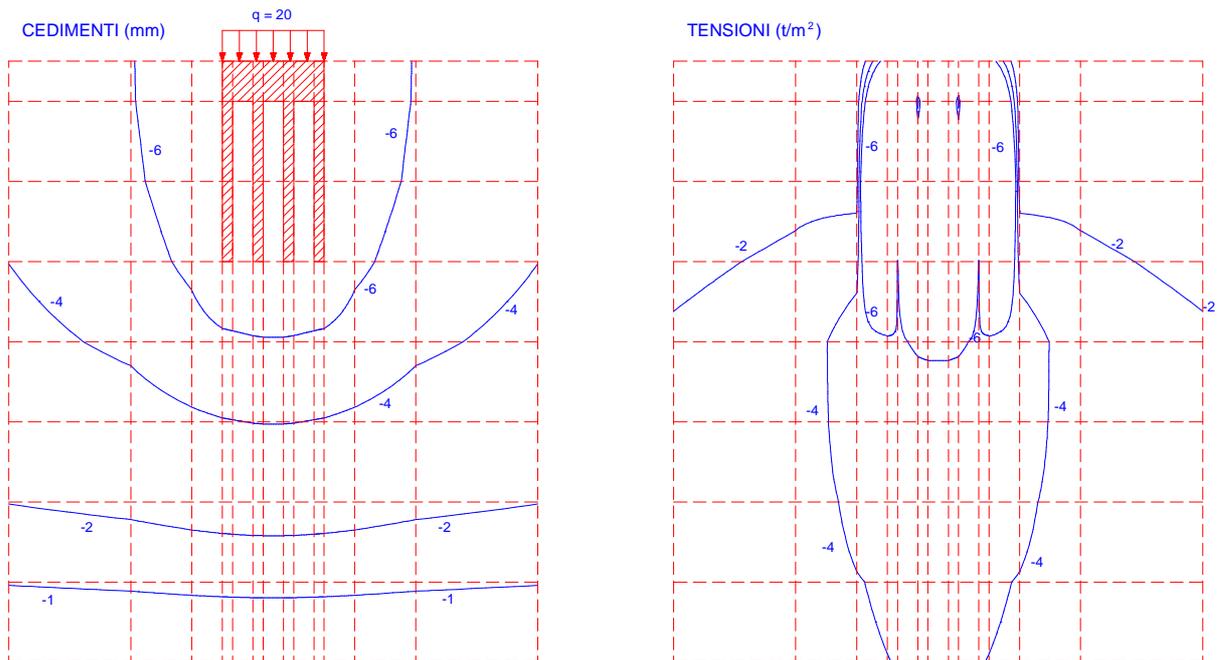


Figura 15

CEDIMENTI E TENSIONI CALCOLATI CON MATERIALE EQUIVALENTE (file PALIE4)

2.5
scala geometrica

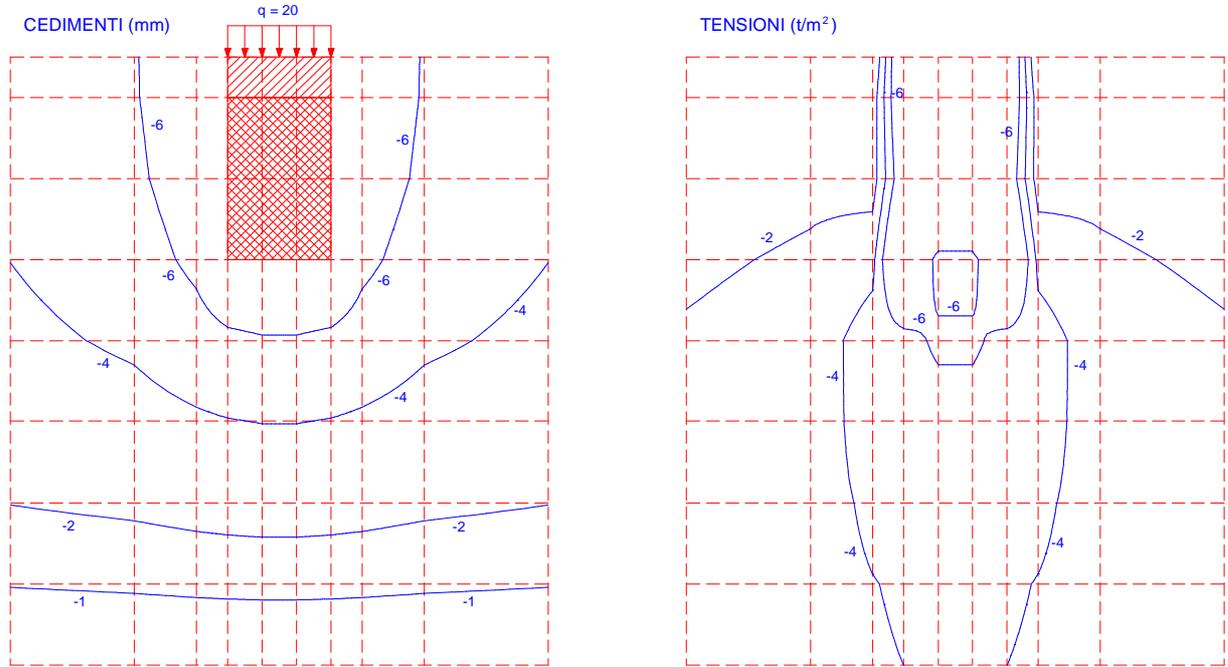


Figura 16

CEDIMENTI E TENSIONI CALCOLATI CON ELEMENTI TRUSS (file PALIM4)

2.5
scala geometrica

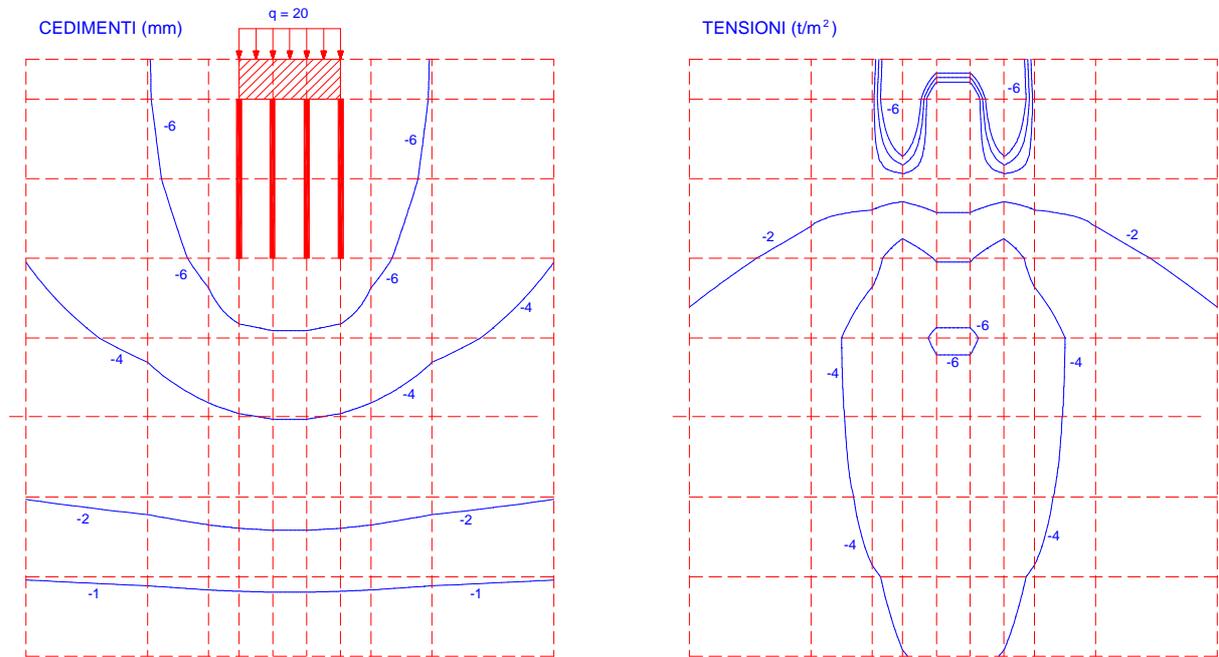


Figura 17

3. Cenni sull'interazione Terreno-Fondazione.

Quando si vuole concentrare l'attenzione sullo stato di sollecitazione delle fondazioni (continue o a piastra), si ricorre solitamente a metodi che considerano contemporaneamente il terreno e la fondazione, introducendo una serie di ipotesi semplificative.

Le principali ipotesi che normalmente vengono fatte sono le seguenti:

- i carichi sulle fondazioni sono solo verticali e vengono determinati indipendentemente dalla rigidità delle strutture in elevazione e dai cedimenti del terreno;
- l'estradosso delle fondazioni viene considerato "liscio", cioè non si considerano le tensioni tangenziali fra la fondazione e il terreno.

Le fondazioni continue o a piastra possono essere descritte analiticamente con le seguenti equazioni differenziali:

$$EJ \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) - p(x) \quad \text{per la trave}$$

$$D\nabla^4 u = q(x, y) - p(x, y) \quad \text{per la piastra}$$

dove: u = spostamento verticale;

E = modulo elastico della trave;

J = momento d'inerzia della sezione della trave;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \text{rigidezza flessionale della piastra};$$

h = spessore della piastra;

ν = rapporto di Poisson;

$q(x)$, $q(x, y)$ = carichi distribuiti agenti rispettivamente sulla trave e sulla piastra;

$p(x)$, $p(x, y)$ = reazione del terreno.

Il modello più noto per calcolare le sollecitazioni nelle travi e nelle piastre di fondazione è quello di Winkler (1867), che lega la reazione del terreno in un punto con lo spostamento verticale dello stesso punto, con una costante di proporzionalità k , detta coefficiente di reazione del terreno:

$$p(x, y) = k u(x, y)$$

La notorietà di questo modello è giustificata dall'esistenza di soluzioni in forma chiusa dell'equazione differenziale della trave. Con l'avvento e la diffusione dei computer il metodo è rimasto di semplice applicazione e si è potuto utilizzarlo anche per lo studio delle piastre.

In appendice A è riportata la matrice di rigidità dell'elemento finito trave su suolo alla Winkler (o trave su suolo elastico). Le piastre su suolo alla Winkler vengono normalmente calcolate introducendo delle molle in corrispondenza dei nodi degli elementi. L'intensità delle molle è proporzionale alla loro area di influenza, calcolata con le funzioni di forma.

Il modello di Winkler si è dimostrato efficace nella valutazione dello stato di sollecitazione delle travi e delle piastre di fondazione. Si tratta di un metodo abbastanza sicuro in quanto i risultati che si ottengono non sono molto influenzati dalla scelta del coefficiente di reazione del terreno. Per contro è necessario osservare che questo metodo fornisce sollecitazioni nulle in presenza di carichi uniformemente distribuiti e quindi la modellazione richiede esperienza e "buon senso ingegneristico".

Traendo ispirazione dal modello di Winkler sono stati sviluppati molti metodi analoghi, fra cui quello di Pasternak (1954), di Filonenko-Borodich (1940), di Hetenyi (1946), di Grasshoff (1951), di Vlasov e Leont'ev (1966) e molti altri.

4. Cenni sull'interazione Terreno-Fondazione-Struttura.

Utilizzando il metodo degli elementi finiti è teoricamente possibile, anche se laborioso, schematizzare contemporaneamente il terreno, le strutture di fondazione e quelle in elevazione. Per i tre componenti sono infatti disponibili adeguati modelli di comportamento, che opportunamente assemblati possono fornire un unico modello del complesso terreno-fondazione-struttura.

In letteratura si trovano diversi contributi allo studio dell'interazione considerata nella sua forma più generale, però allo stato attuale questo tipo di approccio comporta un impegno che non trova giustificazione nell'attività progettuale, in quanto le risposte di questi modelli complessi non sono in grado di aderire alla realtà sperimentale.

In [41] sono riportati i risultati pubblicati da Fjeld (1963), relativi ad un edificio industriale di tre piani fuori terra, con fondazioni continue poggianti su terreno coesivo. Fin dalle prime fasi costruttive si sono manifestati forti cedimenti assoluti e differenziali che hanno raggiunto rispettivamente 30 cm e 15 cm circa. E' stato impostato un modello elastico della struttura in elevazione al quale, oltre ai carichi agenti, sono stati imposti i cedimenti misurati. Confrontando i momenti flettenti calcolati con i momenti resistenti delle varie sezioni in c.a., si sono ottenuti diversi coefficienti di sicurezza inferiori all'unità, ma nonostante questo non sono stati praticamente rilevati danni alle strutture.

Il modello elastico non è in grado di tenere conto della storia di carico, delle deformazioni viscosi e delle ridistribuzioni delle sollecitazioni conseguenti a plasticizzazioni locali; risulta inoltre molto laborioso considerare nei calcoli anche gli elementi secondari come le pareti di tamponamento.

Sebbene sia possibile ricorrere a modelli che tengano conto in modo più raffinato del reale comportamento delle strutture, tale sforzo non sembra attualmente giustificato in quanto con i metodi tradizionali si perviene a dimensionamenti strutturali soddisfacenti, anche se basati su parametri di sollecitazione convenzionali.

Anche il calcolo delle deformazioni del terreno può essere condotto trascurando o considerando in modo indiretto le strutture in elevazione, ottenendo buoni risultati.

5. Bibliografia

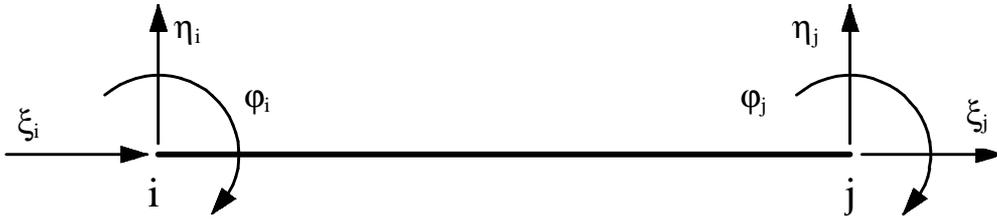
1. Babuska, I., Szabo, B.A., Katz, I.N., 1981. *The p-version of finite element method*. SIAM J. Num. Anal. 18.
2. Baldi, G., Bellotti, R., Ghionna, V., Jamiolkowski, M., 1982. *Design parameters for sand from CPT*. Esopt II, Amsterdam.
3. Barden, L., Younan, N.A., 1969. *Consolidation of layered clays*. Canadian Geot. J. n. 6, pp. 413-428.
4. Bellotti, R., Ghionna, V., Jamiolkowski, M., Pedroni, S., 1983. *Le prove penetrometriche statiche nei terreni non coesivi*. XI Ciclo di Conferenze, Politecnico di torino.
5. Biot, M.A., 1941. *General theory of three dimensional consolidation*. J. Appl. Phys.
6. Bjerrum, L., 1963. *Discussion of compressibility of soils*. Proc. E.C.S.M.F.E., Vol. 2, pp. 16-17.
7. Borsetto, M., Colleselli, F., Colombo, P.,, Varagnolo, P., 1991. *Settlement analysis of main buildings in power plants by means of 2-D and 3-D models*. X ECSMFE Firenze.
8. G.Corti, D.Faiella, S.Martinetti, L. Tripiciano, G. Giuseppetti, G.Mazzà, G.La Barbera, M.Borsetto, P. Bonaldi, P. Colombo, F. Colleselli, P. Varagnolo, 1992. *Analisi dei cedimenti delle opere principali di alcune centrali ENEL della Pianura Padana*. I quaderni dell' ismes. Pubblicata inoltre da ENEL, Nova-Tiporom-Roma (fuori commercio).
9. Burland, J.B., Wroth, C.P., 1974. Review Paper: *Settlement of buildings and associated damage*. Proc. Conf. on Settlement of Structures, pp. 611-654.
10. Colleselli, F., Mazzucato, A., Previatello, P., Soranzo, M., 1985. *Ammissibilità dei cedimenti di sovrastrutture e di fondazioni in costruzioni industriali e civili*. Atti delle giornate A.I.C.A.P. 1985.
11. Colleselli, F., Martinetti, S., La Barbera, G., Varagnolo, P., 1988. *Analisi dei cedimenti di quattro ciminiere*. Convegno ricercatori C.N.R., Monselice.
12. Colleselli, F., Varagnolo, P., 1993. *Behaviour of direct tower foundation on improved soil*. III Int. Conf. on Case Hist. in Geot. Eng., St. Louis, Missouri.
13. Colombo, P., Colleselli, F., Mazzucato, A., Soranzo, M. 1979. *Geotechnical parameters for embankments and pile foundation design*. VII E.C.S.M.F.E. Brighton.
14. Colombo P., 1987. *Comportamento delle strutture di grande altezza*. Rapporto interno ISMES n. 8.
15. Colombo P., ITALGEO, 1989. *Analisi ad elementi finiti dei cedimenti di fondazioni perfettamente rigide e flessibili - seconda parte*. Rapporto interno ITALGEO-ISMES.
16. D'Appolonia, D.J., D'Appolonia, E., Brisette, R.F., 1970. *Discussion on settlement of spread footings on sand*. ASCE J. SMFD 96: SM 2.
17. Desai, C.S., Johnson, L.D., 1972. *Evaluation of two finite elements formulations for one dimensional consolidation*. Computer and structure, Vol. 2, pp. 469-486.
18. Duncan, J.M., Buchignani, A.L., 1976. *An engineering manual for settlement studies*. Dept. of C.E., Univ. of California, Berkeley.
19. Fusco, A., 1985. *Continuum mechanics and finite element numerical solutions in geotechnique*. Ph.D. Thesis - University of Ottawa Ontario.
20. Kaniraj, S.R., Ranganatham, B.V., 1974. *Settlement of buried loaded areas*. Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, pp. 95-103.
21. Kèrisel, J., 1985. *The history of geotechnical engineering up until 1700*. Proc. 11th I.C.S.M.F.E., San Francisco, pp. 3-93.

22. Lancellotta, R., 1983. *Le prove penetrometriche statiche nei terreni coesivi*. XI Ciclo di Conferenze, Politecnico di torino.
23. Lewis, R.V., Schrefler, B.A., 1987. *The finite element method in the deformation and consolidation of porous media*. John Wiley and Sons, Chichester.
24. Lewis, R.V., Tran, D.V., 1989. *Application of soil-structure interaction to off.shore foundation with specific reference to consolidation analysis*. Int. J. for Num. Meth. in Engineering, Vol. 27.
25. Meyerhof, G.G., 1947. *The settlement analysis of building frames*. Structural Engineer, Vol. 25, pp. 309.
26. Mindlin, R.D., 1936. *Force at a point at the interior of a semiinfinite solid*. Physics, No. 7.
27. Pasqualini, E., 1983. *Standard penetration test*. XI Ciclo di Conferenze, Politecnico di torino.
28. Peano, A. 1976. *Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending*. Comp. Math. with Appls. 2.1.
29. Polshin, D.E., Tokar, R.A., 1957. *Maximun allowable non-uniform settlement of structures*. Proc. 4th I.C.S.M.F.E., Vol 1, pp. 402.
30. Poulos, H.G., Davis, E.H., 1980. *Pile foundations analysis and design*. John Wiley and Sons, New York.
31. Pressley, J.S., Poulos, H.G., 1986. *Finite element analysis of mechanism of pile group behaviour*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 8, pp. 243-257.
32. Reed, M.B., 1984. *An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements*. Int. J. Num. Anal. Methods Geomech., Vol. 8.
33. Robertson, P.K., Campanella, R.G. 1983. *Interpretation of cone penetration tests*. Canadian Geotechnical Journal.
34. Sanglerat, G., 1979. *The penetrometer and soil exploration*, 2nd ed. Elsevier Publishing Co., Amsterdam.
35. Schiffman, R.L., Arya, S.K., 1977. *One-dimensional consolidation*. Num. meth. in Geot. Engineering. C.S. Desai and J.T. Christian.
36. Skempton, A.W., Mac Donald, D.H., 1956. *The allowable settlement of buildings*. Proc. I.C.E., Part. 3, pp. 727-784.
37. Skempton, W.W., Bjerrum, L., 1957. *A contribution to the settlement analysis of foundation on clay*. Geotechnique, Vol. 7, pp. 168-178.
38. Skopek, J. 1961. *The influence of foundation depth on stress distribution*. Proc. 5th I.C.S.M.F.E., Paris, Vol. 1, pp. 815-818.
39. Terzaghi, K., 1940. *Sampling, testing and averaging*. Proc. Purdue Conf. on Soil Mech. and its applications, p. 151.
40. Terzaghi, K., Peck, R.B., 1967. *Soil mechanics in engineering practice*. J. Wiley, p. 491.
41. Tomlinson, M.J., 1977. *Pile design and construction practice*. A Viewpoint publication.
42. Viggiani, C., 1993. *Fondazioni*, CUEN.
43. Webb, D.L., Mival, K.N., Allison, A.J., 1982. *A comparison of the methods of determining settlements in estuarine sands from Dutch cone penetration tests*. Esopt II.
44. Whitaker, T., 1976. *The design of piled foundations*. Pergamon Press, II edition.
45. Zienkiewicz, O.C., 1977. *The finite element method*. Mc Graw Hill, U.K., III edition.

Allegato A: alcuni esempi di calcolo.

(materiale presentato alla conferenza)

Allegato B: ELEMENTO FINITO TRAVE 2-D SU SUOLO ALLA WINKLER



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO PER UN ELEMENTO

$$f = [K]_w \delta$$

dove:

$$f = [M_i \ T_i \ N_i \ M_j \ T_j \ N_j]^T$$

VETTORE DELLE FORZE EQUIVALENTI AI NODI

$$\delta = [\varphi_i \ \xi_i \ \eta_i \ \varphi_j \ \xi_j \ \eta_j]^T$$

VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI AI NODI

$$[K]_w = [K]_{TRAVE} + [K]_{TERRENO}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA (LOCALE)

$$[K]_{TRAVE} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & \frac{-6EJ}{l^2} & 0 & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 \\ & \frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ}{l^2} & \frac{-12EJ}{l^3} & 0 \\ & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{-EA}{l} \\ & & & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 \\ & & & & \frac{12EJ}{l^3} & 0 \\ & & & & & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

sim.

$$[K]_{TERRENO} = k_w Bl \begin{bmatrix} \frac{l^2}{105} & \frac{-11l}{210} & 0 & \frac{-l^2}{140} & \frac{-13l}{420} & 0 \\ & \frac{13}{35} & 0 & \frac{13l}{420} & \frac{9}{70} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{l^2}{105} & \frac{11l}{210} & 0 \\ & & & & \frac{13}{35} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

sim.